Równania różniczkowe

Definicja 1 (Równania różniczkowego)
Równaniem różniczkowym nazywamy równanie wyrażające związki między funkcją i jej pochodnymi.
Dla przykłady, jeśli x jest funkcją zmiennej t, to $\ddot{x} + 8\dot{x} + 7x = 0$ jest równaniem różniczkowym.
Uwaga dotycząca notacji
Pochodną funkcji $x(t)$ będziemy oznaczać $\dot{x}$ lub $\frac{dx}{dt}$.
Jeżeli f jest funkcją x, tzn. $y = f(x)$, to równoważnie możemy używać oznaczeń dla pochodnej funkcji F:

y', $\quad \frac{dy}{dx}$, $\quad$ (lub y'', $\quad \frac{d^2y}{dx^2}$ - dla pochodnej drugiego rzędu).

Jeżeli funkcja w równaniu różniczkowym jest funkcją jednej zmiennej, to takie równanie nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym.
Rzędem równania różniczkowego nazywamy rząd najwyższej pochodnej występującej w równaniu.

Na przykład równanie $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ jest rzędu pierwszego a równanie $\frac{d^2y}{dt^2} = at$ jest rzędu drugiego.

Rozwiązanie równania różniczkowego
Rozwiązać równanie różniczkowe oznacza znaleźć funkcję, która spełnia to równanie.

Dla wielu równań różniczkowych znalezienie rozwiązania może nie być łatwe. Łatwe jest jednak zawsze sprawdzenie czy konkretna funkcja jest rozwiązaniem równania różniczkowego.

Przykład 1
Sprawdzić, czy $y(t) = e^{3t}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego $\dot{y} = 3y$
Rozwiązanie
Podstawiamy funkcję $y(t)$ i jej pochodną do równania i otrzymujemy:

pochodna $\dot{y}(t) = 3e^{3t}$ $\qquad$ funkcja $y(t) = e^{3t}$

Zatem $3e^{3t} = 3e^{3t}$
Ponieważ lewa strona równania równa się stronie prawej, to funkcja $y(t) = e^{3t}$ jest rozwiązaniem równania.

Przykład 2
Pokazać, że funkcja $y(t) = t^3$ nie jest rozwiązaniem równania różniczkowego $\dot{y} = \frac{y}{t}$
Rozwiązanie
Obliczamy pochodną funkcji y i otrzymujemy $3t^2$.
Prawa strona jest zatem równa $\frac{y}{t} = \frac{t^3}{t} = t^2$ zaś lewa strona jest równa $3t^2$.
Więc funkcja $y(t) = t^3$ nie jest rozwiązaniem równania $\dot{y} = \frac{y}{t}$

Parametryzacja zbioru rozwiązań równania różniczkowego

Równanie różniczkowe zwykle mają więcej niż jedno rozwiązanie. Można zbiór wszystkich rozwiązań opisać używając parametrów.

Przykład 3 Znaleźć rozwiązania (wszystkie) równania różniczkowego: $\ddot{x} = 2t$

Całkując obustronnie pierwszy raz otrzymamy:
$\dot{x} = 2\dfrac{t^2}{2} + C_1 = t^2 + C_1$
Całkując obustronnie drugi raz otrzymamy:
$x(t) = \dfrac{t^3}{3} + C_1 \cdot t + C_2$ (1) to jest rozwiązanie ogólne

gdzie: C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi rzeczywistymi.

Równanie (1) jest "parametrycznym opisem" zbioru wszystkich rozwiązań równania $\ddot{x} = 2t$.

Stałe C_1 i C_2 są nazywane parametrami.
Każdy wybór konkretnych wartości dla C_1 i C_2 daje pojedyncze rozwiązanie (tzw. rozwiązanie szczegółowe)
Dla przykładu: $x(t) = \dfrac{t^3}{3} + 2t + 1$ oraz $x(t) = \dfrac{t^3}{3} + \pi t + e$ są różnymi rozwiązaniami szczegółowymi równania $\ddot{x} = 2t$

Problem warunków początkowych

Czasem dane jest równanie różniczkowe i dane są warunki początkowe.W takiej sytuacji mówimy, że mamy do czynienia z problemem z warunkami początkowymi.
Warunki początkowe mogą narzucać wartość funkcji szukanej dla ustalonego punktu, lub wartość pochodnej funkcji szukanej dla ustalonego punktu.

Przykład 4 Rozwiązać problem z warunkami początkowymi:
$\ddot{x} = 2t$ z warunkami $x(1) = 1$ oraz $\dot{x}(1) = 2$.

Rozwiązanie

W poprzednim przykładzie znaleźliśmy rozwiązanie ogólne tego równania jako:
$x(t) = \frac{t^3}{3} + C_1 \cdot t + C_2$.
Wykorzystamy warunki początkowe do określenia wartości stałych liczbowych C_1 i C_2.

$\dot{x}(t) = t^2 + C_1$ zatem $\dot{x}(1) = 1 + C_1 = 2$ skąd $\underline{C_1 = 1.}$
$x(t) = \dfrac{t^3}{3} + C_1 t + C_2$ zatem $x(1) = \dfrac{1}{3} + C_1 \cdot 1 + C_2 = 1$ skąd $\underline{C_2 = -\dfrac{1}{3}}$.

Zatem rozwiązanie powyższego problemu z warunkami początkowymi ma postać:
$x(t) = \dfrac{t^3}{3} + t - \dfrac{1}{3}$.

Najważniejsze równanie różniczkowe

Za najważniejsze równanie różniczkowe jest uważane równanie postaci:
$\dot{y} = ay$ (2)
Słownie równanie to można wypowiedzieć następująco:
"Szybkość zmian y jest proporcjonalna do y"

W literaturze można znaleźć to równanie (2) w innych postaciach (z wykorzystaniem innych notacji pochodnych):

$\frac{dy}{dt} = a \cdot y(t), \qquad y' = ay, \qquad \dot{y} - a \cdot y = 0$

Wszystkie powyższe równania są tym samym związkiem między funkcją y a jej pochodną.

Rozwiązaniem równania (2) jest funkcja:
$y(t) = Ce^{at}$ gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą.
Łatwo to sprawdzić przez podstawienie rozwiązania do lewej i prawej strony równania (2).

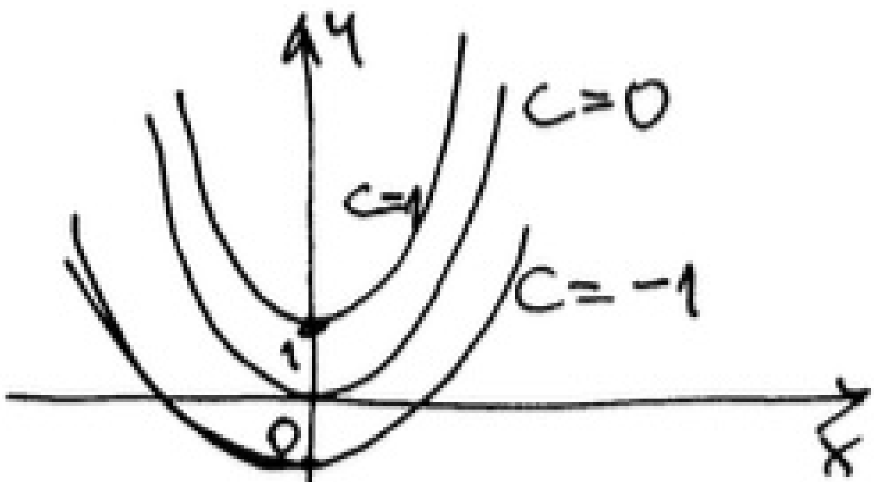
Ponieważ w rozwiązaniu równania (2) występuje funkcja wykładnicza, to równanie (2) jest nazywane równaniem wzrostu wykładniczego (lub spadku wykładniczego). Sała a jest nazywana współczynnikiem wzrostu (lub spadku) wykładniczego.

Inne podstawowe przykłady równań różniczkowych
Podane zostaną podstawowe przykłady zaczerpnięte z matematyki i innych dziedzin. Z wyjątkiem przykładu 5 nie będą podane rozwiązania.

Przykład 5 (z rachunku całkowego)
Znaleźć funkcje $y(x)$ spełniające rownanie różniczkowe $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Rozwiązanie
Polega na znalezieniu funkcji pierwotnej dla $2x$. Funkcją tą jest każda funkja postaci $y(x) = x^2 + C$ (rozwiązanie ogólne)

Wykres krzywych całkowych (czyli wykresy funkcji $y(x) = x^2 + C$ dla różnych $C \in \mathbb{R}$)



Rys. 1.